湖南大学

硕士学位论文

脉冲微分方程的解及其应用

姓名：王密

申请学位级别：硕士

专业：应用数学

指导教师：舒小保

20100502

摘　要

本学位论文主要讨论了脉冲微分方程边值问题解的存在性, 该论文主要通过不动点指数理论和不动点定理去研究所给系统解的存在性, 其内容主要包括:

第一章, 介绍了脉冲微分方程的研究背景, 然后给出本文要用到的定义和定理, 指出本文所做的工作及创新点, 并且系统分析了脉冲微分方程近年发展情况.

第二章, 研究了一类二阶非线性脉冲常微分方程边值问题 (BVP) 解存在的条件. 由于方程中含有函数 $p(t)$, 给研究工作带来了困难. 本文通过建立方程系统解的表达式, 借助于其边值问题解的积分表示以及特殊的技巧得到解算子A, 然后利用锥上的不动点指数理论, 得到了此类问题存在正解的充分条件, 所得结果改进了已有的部分结论. 作为应用, 我们给出了一个具体实例.

第三章, 研究了二阶脉冲泛函微分方程解的存在条件. 由于方程中含有函数 $p(t)$, 这就增加了研究的难度. 本文也是通过建立方程系统解的表达式, 再利用两个不动点定理, 得到了此类问题存在至少一个解的充分条件. 将已有的脉冲常微分方程边值问题的相应结果推广到脉冲泛函微分方程. 为说明结论的可行性, 我们给出了具非线性边界条件的实例.

第四章, 解决一类分数阶脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性问题. 由于分数阶的脉冲微分方程研究具有一定的难度, 目前的研究结果也较少, 本文仿照前面两章的结果, 先给出方程解的形式, 再利用半群理论结合压缩映像原理, 得到了 mild 解的存在性和唯一性, 推广了先前的结果. 为说明定理的正确性, 本章最后给出一个实例.

最后, 对全文进行了总结, 总结每章中的主要结果并指出有待进一步深入研究的主题.

关键词: 脉冲微分方程; 边值问题; 解的存在性; 不动点

Abstract

The focus of this dissertation is to study solutions of existence of impulsive differential equations. In this dissertation, we mainly devote to the fixed point index theory and the fixed point theorems to research the existence of solutions to the given system, which is organized as follows:

Firstly, we introduce the research background, and then show definitions and theorems which are used in this dissertation, point out the work and innovations we do, and then systematically analyze development situations of impulsive differential equations.

Secondly, we give existent conditions of a class of boundary value problems (BVP) for nonlinear second order impulsive ordinary differential equations. Since this equation has a function $p(t)$ which brings about difficulties for our research. By establishing the expression of system solutions, with integral form and special skills of boundary value problems, we obtain a solution operator A. Next by using the fixed point index theorem, we get a sufficient condition of this problem. The results improve the existing conclusions. We give an example to illustrate the main results.

Thirdly, by using two fixed point theory, we give existent conditions and a sufficient condition of a second order impulsive functional differential equations. Since this equation has a function $p(t)$ which brings about difficulties for our research. We promote boundary value problem of impulsive ordinary differential equations to functional differential equations. To illustrate the feasibility of the conclusion, we present an example.

Fourthly, we solve existence and uniqueness of mild solutions to fractional impulsive differential equations. It is difficult to study fractional impulsive differential equations, so there are few results in this aspect. We give the expression of solutions following by the above forms, then by using the contraction mapping principle and semigroup theory, we get the existence and uniqueness of mild solutions. We give an example to illustrate the main results.

Finally, we summarize the main results in every chapter in this paper, and note some subjects which need further study.

Key Words: Impulsive differential equations; Boundary value problem; Existence of the solutions; The fixed point

第1章 绪论

1.1 背景介绍

在科学研究中, 很多物理、化学和生物现象都可用微分方程来描述, 微分方程问题的脉冲效应也引起了人们的重视, 脉冲现象作为一种瞬时突变现象, 其数学模型往往可以归结为脉冲微分系统. 脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变对状态的影响, 能够更深刻地反映事物的变化规律. 这类方程在人口动力系统、物理学[1]、生物学[2]、经济学和控制理论[3]等学科的具体模型中有应用. 1960年, Mil'man 和 Myshkis[4] 开始研究脉冲微分方程, 专著[5,6]的问世使脉冲常微分方程理论逐步形成并趋于成熟.

脉冲微分方程的研究有脉冲常微分方程, 脉冲泛函微分方程, 脉冲微分方程的边值问题和初值问题等领域. 例如 Zhang 和 Liu[7] 用不动点定理解决了一类二阶非线性混合型脉冲积分-微分方程初值问题, 利用非紧性测度[8-10]研究了二阶脉冲积分-微分方程初值问题. 本文重点来研究脉冲微分方程的边值问题 (BVP), 边值问题是微分方程的一个重要的研究领域, 是当前研究的热点课题之一. 对这一问题的研究, 早在 Sturm 和 Liouville 时期就开始了. 至今, 在边值问题的深度、广度和研究方法上都取得了很大进展[11-15]. 但是对脉冲微分系统边值问题的研究, 仅有十多年的历史[16-18]. 对于研究解的存在性的方法, 主要有单调迭代方法和不动点定理, 因方程边界条件形式的多样, 研究中采用的具体方法也各有差异. Lee[19] 利用单调迭代方法研究了一类二阶脉冲微分方程的奇异边值问题, Luo[20] 利用单调迭代方法研究了一阶脉冲泛函微分方程的周期边值问题, Zhao[21] 利用 Leray - Schauder 度理论研究了一类二阶脉冲微分方程两点边值问题至少存在三解的情况.

由于带参数的微分方程是一类考虑了控制因素的数学模型, 在物理学, 人口动力学, 经济学等众多学科都有广泛的应用, 因而引起了许多数学工作者的注意. 近年来已获得了许多带参数的微分方程边值问题解的存在性定理[22-25], 但含有的只是参数λ, 为了更深入的研究, 本文的第二章研究带函数 $p(t)$ 更复杂的情况下脉冲常微分方程的解. Chang[26] 利用适当的不动点定理研究了带函数 $p(t)$ 的脉冲泛函微分方程解的存在性, 受其启发, 本文第三章用不同的不动点定理再来研究此方程, 得到了解的存在定理.

分数微积分第一次提到是在1695年 *Marquis de L'Hôpital* 给 Gottfried Wilhelm Leibniz 的信件中, 对于 $\frac{d^n y}{dx^n}$, $n \in \mathbf{N} := \{0,1,2,\cdots\}$, 假设当 $n = \frac{1}{2}$ 时, 会产生一种新的结果. 后来, 分数导数被渐渐知晓, 例如 Euler 在1730年, Lagrange 在1772年, Fourier 在1822年等人都研究过分数导数. 分数导数被应用在很多领域,

比如概率, 粘弹性理论, 电子学, 经济学, 力学, 生物学等等, 近年来分数阶微分方程的理论研究有很大发展. 在最近的研究中, 很少涉及分数阶脉冲微分方程. 最近, Benchohra 等人[27,28]发现了一类分数阶脉冲方程的初值问题涉及对于 $0 < \alpha < 1$ 和 $1 < \alpha < 2$ 的 Caputo 分数导数解的存在性问题的充分条件, Ahmad 等人[29,30]给出了分数阶 $1 < \alpha < 2$ 时的非线性混合型脉冲微分方程边值问题的存在性结果, Mophou 研究了分数阶 $0 < \alpha < 1$ 时的脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性.

自90年代以来, 脉冲微分系统引起微分系统学者专家的重视与兴趣[7-11,31,38-42], 已逐渐形成非线性微分系统研究领域的新热点. 在脉冲微分系统的基本理论[46]、边值问题、稳定性理论等方面都取得了一些重要学术成果. 比如得到了无限延滞的脉冲泛函微分系统解的唯一性定理、整体存在性定理、延展定理及解的连续依赖定理; 建立了依赖于状态的脉冲微分系统的比较原理; 给出了脉冲混合微分系统、脉冲泛函微分系统等关于两个测度的稳定性定理; 建立了变动时刻脉冲微分系统的周期边值问题等. 在应用上, 脉冲微分系统源于实践并将应用于实践, 近年来已成功应用于通信等领域.

1.2 基本知识

若不存在脉冲, 在一定的条件下, 微分方程边值问题具有解的存在性, 但脉冲会影响微分系统无解. 因此, 我们研究的方法主要有 *Schauder* 不动点定理, 单调迭代方法, 不动点指数定理, 压缩映像原理, 锥的拉伸与压缩不动点定理等. 下面给出本文所要用到的定义与定理.

定义 1.2.1 [43]设 E 为 *Banach* 空间, P 是 E 中的非空闭集. 如果 P 满足

(i) 任给 $x, y \in P$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, 有 $\alpha x + \beta y \in P$;

(ii) 若 $x \in P$, $x \neq \theta$, 则 $-x \overline{\in} P$;

则称 P 是 E 中的锥.

定义 1.2.2 [43]设 E 是一个拓扑空间, $X \subset E$, 若存在连续算子 $r : E \to X$, 使当 $x \in X$ 时, 恒有 $r(x) = x$, 则称 X 是 E 的一个收缩核, 算子 r 称为是一个保核收缩.

定理 1.2.1 [43]设 X 是实 *Banach* 空间 E 中的一个收缩核, 对于 X 的每个有界开集 $x \in X$, 设 $A : \overline{U} \to X$ 全连续且在 ∂U 上没有不动点 (即 $Ax \neq x$), 其中 $\overline{U}$ 和 ∂U 分别是 U 相对于 X 的闭包和边界, 则存在整数 $i(A, U, X)$ (称为 A 在 U上关于 X 的不动点指数), 满足当 $i(A, U, X) \neq 0$ 时, A 在 U 中至少有一个不动点.

定理 1.2.2 [44]令 D 是 $Banach$ 空间 $(\mathbb{Z},\|\cdot\|_{\mathbb{Z}})$ 中的一个有界凸闭集, 假设 $0\in D$, 如果 $F:D\to D$ 是一个全连续算子, 如果集合 $\{x\in D: x=\lambda F(x),\ 0<\lambda<1\}$ 是有界的, 那么 F 在 D 中有一个不动点.

定理 1.2.3 [45]令 D 是 $Banach$ 空间 $(\mathbb{Z},\|\cdot\|_{\mathbb{Z}})$ 一个有界凸闭集, 如果 B, C: $D\to Z$ 是连续函数, 且满足下面条件:

(i) $Bz+Cz\in D$ 对 $\forall\ z\in\mathbb{Z}$;

(ii) $\overline{C(D)}$ 是紧的;

(iii) 存在 $0\le r<1$ 使得 $\|Bz-Bw\|\le r\|z-w\|$ 对 $\forall\ z,w\in D$;

那么, 存在 $x\in D$ 使得 $Bx+Cx=x$.

1.3 本文所做的工作

本文的主要方法为不动点指数理论和不动点定理研究二阶非线性脉冲常微分方程边值问题, 二阶非线性脉冲泛函微分方程以及分数阶脉冲微分方程 mild 解的存在问题.

第二章, 我们主要对二阶非线性脉冲常微分方程解的存在性进行研究. 郭大钧教授[31]研究了一类特殊的脉冲方程边值问题的多解问题:

$$\begin{cases} -x''=f(t,x),\ t\neq t_k,\ (k=1,2,\cdots,m),\\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)),\ (k=1,2,\cdots,m),\\ \Delta x'|_{t=t_k}=0,\ (k=1,2,\cdots,m),\\ x(0)=x'(1)=0. \end{cases}$$

其中, $f\in C[J\times R_+,R_+]$, $J=[0,1]$, $I_k\in C[R_+,R_+]$, $0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_m<1$, 函数有脉冲, 且 f 只与 t,x 有关, 利用不动点指数理论得出了方程两个解的存在性及其存在区间. 基于郭[31] 的启发, 本章将运用不动点指数理论研究下面含函数 $p(t)$ 的脉冲方程的边值问题:

$$\begin{cases} -(p''(t)x(t)+2p'(t)x'(t)+p(t)x''(t))=f(t,x(t)),\ t\neq t_k,\ (k=1,2,\cdots,m),\\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)),\ (k=1,2,\cdots,m),\\ \Delta x'|_{t=t_k}=0,\ (k=1,2,\cdots,m),\\ x(0)=x'(1)=0. \end{cases}$$

主要思路是先给出脉冲方程解的形式, 然后将脉冲方程转化为与之等价的积分方程, 通过积分方程找到相对应的 $Green$ 函数, 进而转化成算子不动点问题, 然后通

过不动点指数理论分析, 证明方程在一定范围内两个解的存在性, 最后我们给出了一个例子来说明本文主要定理的合理性.

第三章, 我们研究一类二阶脉冲泛函微分方程解的存在性问题. Chang[26] 利用不动点定理研究了下面这类泛函脉冲微分方程解的存在性:

$$\begin{cases} (p(t)y'(t))' \in F(t,y_t), a.e\ t \in [0,T]\backslash\{t_1,\cdots,t_m\}, \\ \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ \Delta y'|_{t=t_k} = J_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ y(t)=\phi(t),\ t\in[-r,0],\ y'(0)=\eta. \end{cases}$$

基于 Chang[26] 的启发, 我们研究下面脉冲方程的边值问题:

$$\begin{cases} (p(t)y'(t))' = f(y_t), a.e\ t \in [0,T]\backslash\{t_1,\cdots,t_m\}, \\ \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ \Delta y'|_{t=t_k} = J_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ y(t)=\phi(t),\ t\in[-r,0],\ y'(0)=\eta. \end{cases}$$

主要思路是先给出脉冲方程解的形式, 然后研究在与 Chang[26] 不同条件下, 用不同的不动点定理给出解的存在性定理.

第四章, 研究分数阶脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性问题.

$$\begin{cases} D_t^\alpha(x(t)+f(t,x_t)) = Ax(t)+g(t,x_t),\ \ t\in I=[0,T], t\neq t_k, \\ x(0)=\varphi\in\mathscr{B}, \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x_{t_k^-}), k=1,\cdots,m. \end{cases}$$

先给出抽象 *Cauchy* 问题 mild 解的定义, 根据此定义得到上述方程的 mild 解, 然后通过半群理论和压缩映像原理给出上述方程 mild 解的存在性和唯一性.

1.4 本文的创新点

本文研究了脉冲微分方程边值问题的解的存在性, 内容涉及到脉冲常微分方程、脉冲泛函微分方程和脉冲分数阶微分方程. 不同之处在于, 一是研究了二阶脉冲微分方程的边值问题, 包括脉冲常微分方程和脉冲泛函微分方程的研究. 得出了此两类方程解存在的充分条件, 二是研究了一类分数阶脉冲微分方程的 mild 解的存在性.

在第二章中, 我们研究了二阶脉冲常微分方程 (2.2) 边值问题解的存在性, 对于一阶或者二阶的等较复杂的脉冲微分方程, 人们通常利用普通的不动点理论, 上下解方法, 单调迭代方法等得出此类方程存在至少一个解的充分条件, 很难利用锥

上的不动点指数理论给出多解存在性的充分条件. 本文通过建立系统 (2.2) 解的表达式, 得到此类系统的解算子 A , 然后利用不动点指数理论, 得出系统 (2.2) 存在两个解的充分条件, 推广了先前的结论.

在第三章中, 我们研究了一类有趣的二阶脉冲泛函微分方程的边值问题 (3.1), 脉冲泛函微分方程的边值问题最近引起了许多作者的注意, 并取得了许多可喜的成果, 包括研究边值问题解的存在性[32–34], 以及全局解的存在性[35,36]等, 但很少有研究含参量函数的泛函微分方程的边值问题. 本文根据不动点理论得出了系统 (3.1) 存在至少一个解的判断准则.

在第四章中, 我们研究分数阶脉冲微分方程. 分数阶微分方程是近年来研究的热点, 分数阶微分方程有关问题的研究不是通常微分方程和偏微分方程相关问题的简单推广, 它有一个全新的空间, 有广泛的研究价值. 分数阶脉冲微分方程研究有一定的难度, 自2008年, Agarwal 等人[37] 研究了 $\alpha \in (0,2)$ 阶 Captuo 型分数阶脉冲微分方程边值问题以来, 已有多位学者研究了分数阶脉冲微分方程, 其中包括 Mophou 研究的分数阶脉冲微分方程的解, 本文利用半群理论, 结合不动点理论研究了分数阶脉冲微分方程的解, 推广了先前的结果.

第 2 章 二阶非线性脉冲常微分方程边值问题

2.1 前言

在本章, 我们研究一类特殊的二阶非线性脉冲常微分方程边值问题解的存在性.具体地说, 在 2.1 节中我们给出脉冲常微分方程满足的基本条件. 在 2.2 节中, 我们给出解的存在定理, 利用不动点指数理论得到在给定区域存在两个解的结论. 在 2.3 节中, 我们给出一个例子来验证其满足 2.2 节中的存在性定理. 这一类方程的构造源于郭大钧[31], 郭研究了下面的方程:

$$\begin{cases} -x'' = f(t,x,x'),\ t \neq t_k,\ (k=1,2,\cdots,m), \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)),\ (k=1,2,\cdots,m), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = 0,\ (k=1,2,\cdots,m), \\ x(0)=x'(1)=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

由于方程中函数 f 含有导数项 x', 我们不能用不动点指数理论来研究这类方程的解问题, 不能在给定区域内得到两解, 在方程中引入函数 $p(t)$, 考察下面这种脉冲方程:

$$\begin{cases} -(p''(t)x(t)+2p'(t)x'(t)+p(t)x''(t)) = f(t,x(t)),\ t \neq t_k,\ (k=1,2,\cdots,m), \\ \Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)),\ (k=1,2,\cdots,m), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = 0,\ (k=1,2,\cdots,m), \\ x(0)=x'(1)=0. \end{cases} \tag{2.2}$$

我们给出方程 (2.2) 满足的条件, $f:[0,1]\times[0,+\infty]\to[0,+\infty]$ 是连续函数, 并且, $f(t,x(t))\geq 0$, $I_k\in C[R_+,R_+]$, $0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_m<1$, $\Delta x|_{t=t_k}$ 表示 $\Delta x|_{t=t_k}=x(t_k{}^+)-x(t_k{}^-)$, 同理 $\Delta x'|_{t=t_k}$ 也有类似表示.

$J=[0,1]$, $p\in C^2[J,R_+]$, $p(1)\neq 0$, 我们令 $\delta=p(1)-p'(1)\neq 0$,
并且 $N=\sum\limits_{k=1}^{m}[p'(1)p(t_k)+p'(1)p'(t_k)(1-t_k)-p(1)p'(t_k)]I_k(x(t_k))$.

$PC[J,R_+]$=$\{x:J\to R_+|\ x(t)$ 在 $t\neq t_k$ 连续, $t=t_k$ 处左连续, $x(t_k{}^+)$ 和 $x(t_k{}^-)$ 存在且 $x(t_k)$=$x(t_k{}^-)$, $k=1,2,\cdots,m\}$, $PC[J,R_+]$ 是 *Banach* 空间, 有范数 $\|x\|_{PC}$=$\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|$.

$PC^1[J,R_+]$=$\{x:J\to R_+|\ x(t)$ 在 $t\neq t_k$ 是连续可微函数, 在 $t=t_k$ 处左连续, 并且 $x(t_k{}^+)$, $x(t_k{}^-)$, $x'(t_k{}^+)$ 和 $x'(t_k{}^-)$ 都存在, $k=1,2,\cdots,m\}$.

对 $x\in PC^1[J,R_+]$, 由中值定理,

$$x(t_k)-x(t_k-h)\in h\overline{co}\{x'(t)|t_k-h<t<t_k\},\ (h>0),$$

易知 $x'_-(t_k)$ 存在, 且

$$x'_-(t_k) = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(t_k) - x(t_k - h)}{h} = x'(t_k^-),$$

约定 BVP(2.2) 中以及下文中的 $x'(t_k)$ 均理解为 $x'_-(t_k)$.

引入范数 $\|x\|_{PC^1}$=$\max\{\|x\|_{PC}, \|x'\|_{PC}\}$ 后, $PC^1[J,R_+]$ 成为一个 *Banach* 空间. 令 $J_0 = [0,t_1]$, $J_1 = (t_1,t_2]$, $\cdots$, $J_{m-1} = (t_{m-1},t_m]$, $J_m = (t_m,1]$, $J' = J\backslash\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}$. $x \in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 叫做 BVP(2.2) 的解, 如果它满足 (2.2) 中所有等式.

2.2 解的存在定理

本节给出方程 BVP(2.2) 在给定区域有两解的存在定理. 首先给出一个定理得到解的表达式, 然后得出解算子, 再利用不动点指数理论, 得出系统 (2.2) 存在两个解的充分条件.

定理 2.2.1 如果 $x \in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 满足方程

$$-(p''(t)x(t) + 2p'(t)x'(t) + p(t)x''(t)) = f(t,x(t)), \tag{2.3}$$

那么,

$$\begin{aligned} x'(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}p(0)x'(0) - \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}p(0)x'(0)t + \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}\textstyle\int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds- \\ & \tfrac{1}{p(t)}\textstyle\int_0^t f(s,x(s))ds + \sum\limits_{0<t_k<t}(\tfrac{1}{p(t)}p'(t_k) - \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}p(t_k))I_k(x(t_k))- \\ & \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}\sum\limits_{0<t_k<t}p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k), \quad \forall\, x \in J, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}\{p(0)x'(0)t - \textstyle\int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds+ \\ & \sum\limits_{0<t_k<t}p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum\limits_{0<t_k<t}p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)\}, \quad \forall\, x \in J. \end{aligned} \tag{2.5}$$

证明: 对方程 (2.3) 积分,

$$p'(t_1)x(t_1) + p(t_1)x'(t_1) - p'(0)x(0) - p(0)x'(0) = -\int_0^{t_1} f(s,x(s))ds,$$

$$p'(t)x(t)+p(t)x'(t)-p'({t_1}^+)x({t_1}^+)-p({t_1}^+)x'({t_1}^+) = -\int_{t_1}^{t} f(s,x(s))ds, \;\forall\, t_1 < t \le t_2,$$

对上面两式相加, 我们得出,

$$p'(t)x(t)+p(t)x'(t) = p(0)x'(0)-\int_0^t f(s,x(s))ds+p'(t_1)[x({t_1}^+)-x(t_1)], \;\forall\, t_1 < t \le t_2,$$

同样的方式, 我们可以证明它对 $\forall\, t \in J$ 成立, 即下面的式子 (2.6) 成立

$$p'(t)x(t)+p(t)x'(t)=p(0)x'(0)-\int_0^t f(s,x(s))ds+\sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k)), \quad (2.6)$$

下一步再进行积分, 得到如下两个式子,

$$p(t_1)x(t_1)-p(0)x(0)=\int_0^{t_1}(p'(s)x(s)+p(s)x'(s))ds,$$

$$p(t)x(t)-p({t_1}^+)x({t_1}^+)=\int_{t_1}^{t}(p'(s)x(s)+p(s)x'(s))ds,$$

从而

$$\begin{aligned} p(t)x(t) &= p(0)x(0)+\int_0^t(p'(s)x(s)+p(s)x'(s))ds+\sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) \\ &= p(0)x'(0)t-\int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds+ \\ &\quad \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k))+\sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k),\ \forall\, t\in J, \end{aligned} \quad (2.7)$$

显然, $p(t)\neq 0$, 我们直接得到

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{p(t)}\{p(0)x'(0)t-\int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds+ \\ &\quad \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k))+\sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)\},\ \forall\, t\in J, \end{aligned} \quad (2.8)$$

我们将 (2.8) 代入 (2.6), 就会得到 (2.4). 证毕. □

定理 2.2.2 $x\in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 是 *BVP(2.2)* 的解当且仅当 $x\in PC^1[J,R_+]$ 是下面脉冲积分方程的解

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{p(t)}\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds+ \\ &\quad \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k))+\sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)+ \\ &\quad \tfrac{t}{\delta}\sum_{k=1}^{m}[p'(1)p(t_k)+p'(1)p'(t_k)(1-t_k)-p(1)p'(t_k)]I_k(x(t_k))\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases} \frac{t}{\delta}[p(1)-p'(1)(1-s)],\ t\leq s \\ \frac{s}{\delta}[p(1)-p'(1)(1-t)],\ t>s. \end{cases}$$

证明: 先假设 $x\in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 是 BVP(2.2) 的解.

第一步, 考虑令 $y(t)=p(t)x(t)$, 那么 (2.3) 就会变成 $-y''(t)=f(t,x(t)),\ t\neq t_k$, 由定理 2.2.1, 我们知道以下结果,

$$\begin{aligned} & y(0)=0,\ \ y'(0)=p(0)x'(0), \\ & y({t_k}^+)-y(t_k)=p(t_k)(x({t_k}^+)-x(t_k))=p(t_k)I_k(x(t_k)), \\ & y'({t_k}^+)-y'(t_k)=p'(t_k)(x({t_k}^+)-x(t_k))=p'(t_k)I_k(x(t_k)), \\ & \Delta y|_{t=t_k}=p(t_k)(x({t_k}^+)-x(t_k))=p(t_k)\Delta x|_{t=t_k}, \\ & \Delta y'|_{t=t_k}=p'(t_k)(x({t_k}^+)-x(t_k))=p'(t_k)\Delta x|_{t=t_k}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

式子 (2.6) 改写成

$$\begin{aligned} y'(t) &= y'(0) - \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} [y'(t_k^+) - y'(t_k)] \\ &= y'(0) - \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k)), \end{aligned} \tag{2.11}$$

同时式子 (2.8) 也可写成

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + y'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s, x(s))ds + \\ &\sum_{0<t_k<t} [y(t_k^+) - y(t_k)] + \sum_{0<t_k<t} [y'(t_k^+) - y'(t_k)](t - t_k) \\ &= y'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s, x(s))ds + \\ &\sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t - t_k), \end{aligned} \tag{2.12}$$

第二步, 在 (2.11) 和 (2.12) 中分别令 $t = 1$, 那么又有

$$y'(1) = y'(0) - \int_0^1 f(s, x(s))ds + \sum_{k=1}^{m} p'(t_k)I_k(x(t_k)), \tag{2.13}$$

和

$$\begin{aligned} y(1) &= y'(0) - \int_0^1 (1-s)f(s, x(s))ds + \sum_{k=1}^{m} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \\ &\sum_{k=1}^{m} p'(t_k)I_k(x(t_k))(1 - t_k), \end{aligned} \tag{2.14}$$

同时, 由 (2.10) 和 (2.13), 我们得到

$$y(1) = p(1)x(1), \tag{2.15}$$

$$y'(1) = p'(1)x(1) = p'(1)\frac{y(1)}{p(1)}. \tag{2.16}$$

第三步, 将 (2.16) 代入 (2.14), (2.13)变为,

$$\begin{aligned} & y'(0) - \int_0^1 f(s, x(s))ds + \sum_{k=1}^{m} p'(t_k)I_k(x(t_k)) \\ = \quad & \tfrac{p'(1)}{p(1)}\{y'(0) - \int_0^1 (1-s)f(s, x(s))ds + \sum_{k=1}^{m} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \\ & \sum_{k=1}^{m} p'(t_k)I_k(x(t_k))(1 - t_k)\}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$y'(0) = \frac{1}{p(1) - p'(1)}\{p(1)\int_0^1 f(s, x(s))ds - p'(1)\int_0^1 (1-s)f(s, x(s))ds + N\}. \tag{2.18}$$

最后, 将 (2.18) 式代入 (2.12) 式, $y(t)$ 就可以表示成

$$\begin{aligned}
y(t) &= y'(0)t - \int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k) \\
&= \tfrac{t}{\delta}p(1)\int_0^1 f(s,x(s))ds - \tfrac{t}{\delta}p'(1)\int_0^1 (1-s)f(s,x(s))ds - \\
&\quad \int_0^t (t-s)f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k) + \tfrac{t}{\delta}N \\
&= \tfrac{1}{\delta}[\int_0^t p(1)tf(s,x(s))ds - \int_0^t p'(1)t(1-s)f(s,x(s))ds - \\
&\quad \int_0^t \delta(t-s)f(s,x(s))ds] + \\
&\quad \tfrac{1}{\delta}[\int_t^1 p(1)tf(s,x(s))ds - \int_t^1 p'(1)t(1-s)f(s,x(s))ds] + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k) + \tfrac{t}{\delta}N \\
&= \tfrac{1}{\delta}\int_0^t [t(p(1)-p'(1)(1-s)) - \delta(t-s)]f(s,x(s))ds + \\
&\quad \tfrac{1}{\delta}\int_t^1 t[p(1)-p'(1)(1-s)]f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k) + \tfrac{t}{\delta}N \\
&= \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k)) + \\
&\quad \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k) + \tfrac{t}{\delta}N.
\end{aligned}$$

因此, $x(t)$ 是积分方程 (2.9) 的解. 反之, 假定 $x \in PC^1[J, R_+]$ 是积分方程 (2.9) 的解. 显然, $\Delta x|_{t=t_k} = I_k(x(t_k))$, $k = 1, 2, \cdots, m$,
当 $t \neq t_k$ 时, 直接微分可知

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \tfrac{1}{p(t)}\{\tfrac{1}{\delta}\int_0^t p'(1)sf(s,x(s))ds + \tfrac{1}{\delta}\int_t^1 [p(1)-p'(1)(1-s)]f(s,x(s))ds + \\
&\quad \tfrac{1}{\delta}N + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))\} + \tfrac{-p'(t)}{p(t)}x(t),
\end{aligned} \tag{2.19}$$

再对 $x'(t)$ 微分

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \tfrac{1}{p(t)}\{\tfrac{1}{\delta}p'(1)tf(t,x(t)) - \tfrac{1}{\delta}[p(1)-p'(1)(1-t)]f(t,x(t))\} + \\
&\quad \tfrac{-p'(t)}{p^2(t)}\{\tfrac{1}{\delta}p'(1)\int_0^t sf(s,x(s))ds + \tfrac{1}{\delta}\int_t^1 [p(1)-p'(1)(1-s)]f(s,x(s))ds + \\
&\quad \tfrac{1}{\delta}N + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))\} + \tfrac{-p'(t)}{p(t)}x'(t) + \tfrac{-p''(t)p(t)+p'(t)p'(t)}{p^2(t)}x(t).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

我们将 $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ 代入方程 (2.3), 然后不难验证结果成立. 故 $x \in C^2[J', R_+]$, 且 $\Delta x'|_{t=t_k} = 0$, $(k = 1, 2, \cdots, m)$.

另一方面, 由 (2.9) 式和 (2.19) 式, 我们可以算出 $x(0) = 0$, $x'(1) = 0$. 接下

来, 就可以定义下面的算子 A:

$$\begin{aligned}(Ax)(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t} p(t_k)I_k(x(t_k))+ \\ & \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)+ \\ & \tfrac{t}{\delta}\sum_{k=1}^{m}[p'(1)p(t_k)+p'(1)p'(t_k)(1-t_k)-p(1)p'(t_k)]I_k(x(t_k))\}.\end{aligned}$$

由 (2.19), 我们知道

$$\begin{aligned}(Ax)'(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}\{\tfrac{1}{\delta}\int_0^t p'(1)sf(s,x(s))ds + \tfrac{1}{\delta}\int_t^1[p(1)-p'(1)(1-s)]f(s,x(s))ds+ \\ & \tfrac{1}{\delta}N + \sum_{0<t_k<t} p'(t_k)I_k(x(t_k))\} + \tfrac{-p'(t)}{p(t)}x(t), \forall\, x\in J,\ t\neq t_k,\ k=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{2.21}$$

由 A 的定义和 (2.21), 可以看出: A 是映 $PC^1[J,R_+]$ 入 $PC^1[J,R_+]$ 的连续算子, 并且, 对 $S\subset PC^1[J,R_+]$ 中的任何有界集 $S\subset PC^1[J,R_+]$, $A(S)$ 中诸函数及其导函数均在 J 上一致有界且在每个 $J_k(k=1,2,\cdots,m)$ 上等度连续. 于是, $A(S)$ 是 $PC^1[J,R_+]$ 中的相对紧集, 故 A 是全连续算子. 证毕. □

定理 2.2.3 $x\in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 是 *BVP(2.2)* 的解当且仅当 $x\in PC[J,R_+]$ 是算子 A 的不动点.

证明: 由定理 2.2.2 即得.

定理 2.2.4 设当 $x\to+\infty$ 时和 $x\to 0_+$ 时, 均有 $\frac{f(t,x)}{p(t)x}\to 0$ 关于 $t\in J$ 一致, 且

$$\frac{p(t)I_k(x)}{x}\to 0,\ \frac{p'(t)I_k(x)}{x}\to 0,\ k=1,2,\cdots,m, \tag{2.22}$$

又设存在 $u_0>0$, 及 $0<a_0<b_0\le 1$, 使

$$f(t,x)\ge \frac{8\delta^2}{p'^2(1)}h(t)u_0,\ \forall\, t\in J_0=[a_0,b_0],\ x\ge u_0, \tag{2.23}$$

其中 $h\in C[J_0,R_+]$, 满足

$$\frac{1}{p(t)}\int_{J_0} h(t)dt > \frac{1}{a_0}, \tag{2.24}$$

那么, *BVP(2.2)* 在 $PC[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 中具有两个解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 满足 $x_1(t)\neq 0,\ x_2(t)>0,\ 0<t\le 1$, 并且

$$\inf_{t\in J_0} x_1(t) < u_0 < \inf_{t\in J_0} x_2(t). \tag{2.25}$$

证明: 由 (2.22) 式知, 存在 $R>u_0>r>0$ 使

$$0\le f(t,x)\le \frac{1}{4}p(t)x,\ \forall\, t\in J,\ 0\le x\le r \text{ 或 } x\ge R, \tag{2.26}$$

$$0 \le p(t)I_k(x) \le \frac{1}{4m}x, \ \ 0 \le x \le r \text{ 或 } x \ge R, \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.27}$$

$$0 \le p'(t)I_k(x) \le \frac{1}{4m}x, \ \ 0 \le x \le r \text{ 或 } x \ge R, \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.28}$$

那么,

$$0 \le f(t, x) \le \frac{1}{4}p(t)x + p(t)M, \ \forall\, t \in J, \ x \ge 0, \tag{2.29}$$

$$0 \le p(t)I_k(x) \le \frac{1}{4m}x + \frac{M}{m}, \ \forall\, x \ge 0, \ k = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.30}$$

$$0 \le p'(t)I_k(x) \le \frac{1}{4m}x + \frac{M}{m}, \ \forall\, x \ge 0, \ k = 1, 2, \cdots, m. \tag{2.31}$$

其中

$$\begin{aligned} M &= max\{M_0, M_1, \cdots, M_m\}, \\ M_0 &= max\{f(t, x) \mid t \in J, \ 0 \le x \le R\}, \\ M_k &= max\{I_k(x) \mid 0 \le x \le R\}. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} a &= \max\{\tfrac{\max\limits_{0\le t\le 1} p(t)}{\min\limits_{0\le t\le 1} p(t)} \tfrac{p'^2(1)}{8\delta^2}, \ \tfrac{2}{\delta}\}, \\ R_1 &= \tfrac{4aM}{2-a}, \\ U_1 &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} < r\}, \\ U_2 &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} < R_1\}, \\ U_3 &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} < R_1 \ , \ \inf_{t\in J_0} x(t) > u_0\}. \end{aligned}$$

于是, U_1, U_2, U_3 都是 $PC[J, R_+]$ 中有界凸开集且 $U_1 \subset U_2$, $U_3 \subset U_2$, $U_1 \cap U_3 = \emptyset$ 显然,

$$\begin{aligned} \overline{U_1} &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} \le r\}, \\ \overline{U_2} &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} \le R_1\}, \\ \overline{U_3} &= \{x \in PC[J, R_+] \mid \|x\|_{PC} \le R_1 \ , \ \inf_{t\in J_0} x(t) \ge u_0\}. \end{aligned}$$

对于 $x \in \overline{U_2}$, 由 (2.29) - (2.31) 知

$$\begin{aligned} 0 \le (Ax)(t) \ &\le \ \tfrac{1}{p(t)} \int_0^1 G(t, s)f(s, x(s)ds + \tfrac{1}{p(1)} \sum_{k=1}^{m} [p(t_k) + p'(t_k)(1 - t_k)]I_k(x(t_k)) \\ &\quad + \tfrac{1}{\delta p(1)} \sum_{k=1}^{m} [p'(1)p(t_k) + p'(1)p'(t_k)(1 - t_k) - p(1)p'(t_k)]I_k(x(t_k)) \\ &\le \ \tfrac{1}{p(t)} \int_0^1 G(t, s)(\tfrac{1}{4}p(s)x + p(s)M)ds + \sum_{k=1}^{m} \tfrac{p(t_k) - p'(t_k)t_k}{\delta} I_k(x(t_k)), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \|Ax\|_{PC} \ &\le \ \tfrac{\max\limits_{0\le t\le 1} p(t)}{\min\limits_{0\le t\le 1} p(t)} (\tfrac{1}{4}\|x\|_{PC} + M) \int_0^1 G(t, s)ds + \tfrac{1}{\delta}(\tfrac{1}{4}\|x\|_{PC} + M) + \\ &\quad \tfrac{1}{\delta}(\tfrac{1}{4}\|x\|_{PC} + M) \\ &\le \ \tfrac{\max\limits_{0\le t\le 1} p(t)}{\min\limits_{0\le t\le 1} p(t)} (\tfrac{1}{4}\|x\|_{PC} + M) \tfrac{p'^2(1)}{8\delta^2} + \tfrac{2}{\delta}(\tfrac{1}{4}\|x\|_{PC} + M) \le R_1, \end{aligned}$$

从而 $\|Ax\|_{PC} < R_1$, 得到

$$A(\overline{U_2}) \subset U_2, \tag{2.32}$$

类似地, 由 (2.26) - (2.28) 式可得

$$A(\overline{U_1}) \subset U_1, \tag{2.33}$$

对 $x \in \overline{U_3}$, 由 (2.30) 式知 $\|Ax\|_{PC} < R_1$, 其次由 (2.23) 式及 (2.24) 式得

$$\begin{aligned} t \in J_0 \Rightarrow (Ax)(t) &\geq \tfrac{1}{p(t)} \int_{J_0} G(t,s) f(s, x(s)) ds \\ &\geq a_0 u_0 \tfrac{p'^2(1)}{8\delta^2} \tfrac{1}{p(t)} \int_{J_0} \tfrac{8\delta^2}{p'^2(1)} h(s) ds > u_0, \end{aligned}$$

故知 $Ax \in U_3$, 从而, 有

$$A(\overline{U_3}) \subset U_3, \tag{2.34}$$

由 (2.32)-(2.34) 诸式知, 不动点指数 $i(A, U_j, PC[J, R_+]) = 1$, $(i = 1,2,3)$. 于是, 又有

$$\begin{aligned} & i(A, U_2 \backslash (\overline{U_1} \cup \overline{U_3}), PC[J, R_+]) \\ & = i(A, U_2, PC[J, R_+]) - i(A, U_1, PC[J, R_+]) - i(A, U_3, PC[J, R_+]) = -1. \end{aligned}$$

由此可知, 根据定理 1.2.1, 存在 $x_1 \in U_2 \backslash (\overline{U_1} \cup \overline{U_3})$ 及 $x_2 \in U_3$ 使 $Ax_1 = x_1$, $Ax_2 = x_2$, 显然, x_1 和 x_2 满足 (2.25) 式, 其中 $x_2(t) > 0$, $\forall\, 0 < t \leq 1$ 的证明如下: 设存在 $0 < t_0 \leq 1$ 使 $x_2(t_0) = 0$, 则

$$\begin{aligned} 0 = (Ax)(t_0) = & \tfrac{1}{p(t_0)} \{ \int_0^{t_0} \tfrac{1}{\delta} s [p(1) - p'(1)(1 - t_0)] f(s, x_2(s)) ds + \\ & t_0 \int_{t_0}^1 \tfrac{1}{\delta} [p(1) - p'(1)(1 - s)] f(s, x_2(s)) ds + \\ & \sum_{0<t_k<t_0} p(t_k) I_k(x_2(t_k)) + \sum_{0<t_k<t_0} p'(t_k) I_k(x_2(t_k))(t_0 - t_k) + \\ & \tfrac{t_0}{\delta} \sum_{k=1}^{m} [p'(1)p(t_k) + p'(1)p'(t_k)(1 - t_k) - p(1)p'(t_k)] I_k(x_2(t_k)) \}, \end{aligned}$$

从而 $f(s, x_2(s)) \equiv 0$, $\forall\, s \in J$. 因 $x_2 \in U_3$, 故由 (2.23) 式和 (2.24) 式知 $0 = \frac{1}{p(t)} \int_{J_0} f(s, x_2(s)) ds \geq \frac{1}{p(t)} \int_{J_0} h(s) u_0 ds > \frac{8\delta^2}{p'^2(1)} \frac{u_0}{a_0}$, 得出了矛盾.

推论 2.2.1 从证明可以看出: 如果 $f(t, x) > 0$, $\forall\, 0 < t \leq 1$, $x > 0$, 则 $x_1(t) > 0$, $\forall\, 0 < t \leq 1$.

2.3 实例

考虑下面的 BVP 问题:

$$\begin{cases} -(-\cos(t)x(t) - 2\sin(t)x'(t) + \cos(t)x''(t)) = 15\sqrt{tx} ln(1 + tx), \ t \neq t_k, (k = 1, 2), \\ \Delta x|_{t=t_1} = sin^2 x(t_1), \ \Delta x|_{t=t_2} = ln(1 + [x(t_2)]^2), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = 0, \ (k = 1, 2), \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases} \tag{2.35}$$

其中 $0 < t_1 < t_2 < 1$, 显然 $x(t) \equiv 0$ 是 BVP(2.35) 的平凡解. 结论: (2.35) 在 $PC^1[J, R_+] \cap C^2[J', R_+]$ 具有两个解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 满足 $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $\forall\, 0 < t \leq 1$, 并且 $\inf\limits_{\frac{1}{2} \leq t \leq 1} x_1(t) < 1 < \inf\limits_{\frac{1}{2} \leq t \leq 1} x_2(t)$.

证明: 对问题 (2.35), 有 $m = 2$, $f(t, x) = 15\sqrt{tx}ln(1 + tx)$, $I_1(x) = sin^2 x$, $I_2(x) = ln(1 + x^2)$, 显然条件 (2.22) 满足, 容易检验, 令 $u_0 = 1$, $a_0 = \frac{1}{2}$, $b_0 = 1$ $h(t) = 15ln(\frac{3}{2})\sqrt{t}$ 时, 条件 (2.23) 和 (2.24) 也满足. 再注意到当 $0 \leq t \leq 1$, $x > 0$ 时, $f(t, x) > 0$, 根据定理 2.2.4 和推论 2.2.1, 即知所述结论成立.

第 3 章 二阶脉冲泛函微分方程解的存在性问题

本章讨论了二阶脉冲泛函微分方程解的存在性. 具体说来, 3.1 节为准备工作, 给出脉冲泛函微分方程满足的条件; 在 3.2 节中, 利用两个不动点定理, 我们得到了脉冲微分方程至少存在一个解的条件; 3.3 节给出一个例子. 对于脉冲泛函微分方程的研究目前这方面的文章较少.

3.1 前言

本章考察下面这个方程解的存在性.

$$\begin{cases} (p(t)y'(t))' = f(y_t), a.e\ t \in [0,T]\backslash\{t_1,\cdots,t_m\}, \\ \Delta y|_{t=t_k} = I_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ \Delta y'|_{t=t_k} = J_k(y(t_k^-)),\ k=1,2,\cdots,m, \\ y(t) = \phi(t),\ t\in[-r,0]\ y'(0) = \eta. \end{cases} \tag{3.1}$$

其中, $D = \{\psi : [-r,0] \to \mathbb{R}^n;\ \psi$ 是除了在 $\widetilde{t}$ 处的连续函数, $\psi(\widetilde{t}^-)$ 和 $\psi(\widetilde{t}^+)$ 存在, 且 $\psi(\widetilde{t}^-) = \psi(\widetilde{t})\}$. $PC = \{y : [0,T] \to \mathbb{R}^n : y_k \in C((t_k, t_k+1], \mathbb{R}^n)$ 并且存在 $y(t_k^-)$ 和 $y(t_k^+)$ 使得 $y(t_k) = y(t_k^-)$, $k = 0,\cdots,m\}$. $\Omega = D\cup PC$, $f:\Omega\to L^1([0,T],\mathbb{R}^n)$, $\phi\in D$, $p\in C([0,T],\mathbb{R}_+)$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, $0<r<\infty$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$, $I_k, J_k\in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$, $k=1,2,\cdots,m$. $y(t_k^-)$ 和 $y(t_k^+)$ 代表 $y(t)$ 在 $t=t_k$ 的左极限和右极限. $\Delta y|_{t=t_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, $\Delta y'|_{t=t_k} = y'(t_k^+) - y'(t_k^-)$. 对于 $[-r,T]\backslash\{t_1,\cdots,t_m\}$ 上的任意连续函数 y, 并且对 $\forall\, t\in[0,T]$, 我们定义 D 中的元素 y_t, $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $\theta\in[-r,0]$, 其中 $y_t(\cdot)$ 代表时间从 $t-r$ 到 t 这一状态.

3.2 解的存在性问题

仿照第二章的结果, 我们来研究方程 (3.1), 为了定义 (3.1) 的解, 在 PC 空间引入范数 $\|y\|_{PC} = \max\{\|y_k\|_{(t_k,t_k+1]}, k=0,\cdots,m\}$, 其中 y_k 是 y 在 $(t_k, t_k+1]$ 上的限制, 这样, PC 构成一个 $Banach$ 空间. 由于 $\Omega = D\cup PC$, $\|y\|_\Omega = \max\{\|y\|_D, \|y\|_{PC}, \forall\, y\in\Omega\}$, 这样, Ω 也构成一个 $Banach$ 空间. 此外, $C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ 也是一个 $Banach$ 空间, 有范数 $\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r\le\theta\le 0\}$.

定理 3.2.1 如果 $x\in PC^1[J,R_+]\cap C^2[J',R_+]$ 满足方程

$$(p(t)y'(t))' = f(y_t), \tag{3.2}$$

那么

$$y'(t)=\frac{1}{p(t)}\{p(0)\eta+\int_0^t f(y_s)ds+\sum_{0<t_k<t}p(t_k)J_k(y(t_k^-))(t-t_k)\},\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \phi(0)+p(0)\eta\int_0^t\tfrac{ds}{p(s)}+\int_0^t\tfrac{ds}{p(s)}\int_0^s f(y_u)du+\\ &\sum_{0<t_k<t}[I_k(y(t_k^-))+J_k(y(t_k^-))\times\int_{t_k}^t\tfrac{p(t_k)}{p(s)}ds].\end{aligned}\tag{3.4}$$

证明: 对方程 (3.2) 积分,

$$p(t_1)y'(t_1)-p(0)y'(0)=\int_0^{t_1}f(y_s)ds,$$

$$p(t)y'(t)-p(t_1^+)y'(t_1^+)=\int_{t_1}^t f(y_s)ds,\ \forall\, t_1<t\le t_2,$$

对上面两式相加, 我们得出,

$$p(t)y'(t)=p(0)y'(0)+\int_0^t f(y_s)ds+p(t_1)J_k(y(t_1^-)),\ \forall\, t_1<t\le t_2,$$

同样的方式, 我们可以证明它对 $\forall\, t\in J$ 成立, 即下面的式子 (3.5) 成立

$$p(t)y'(t)=p(0)y'(0)+\int_0^t f(y_s)ds+\sum_{0<t_k<t}p(t_k)J_k(y(t_k^-)),\tag{3.5}$$

即

$$y'(t)=\frac{1}{p(t)}\{p(0)\eta+\int_0^t f(y_s)ds+\sum_{0<t_k<t}p(t_k)J_k(y(t_k^-))\},\tag{3.6}$$

下一步我们再对 (3.6) 进行积分, 得到

$$\begin{aligned}y(t) &= \phi(0)+p(0)\eta\int_0^t\tfrac{ds}{p(s)}+\int_0^t\tfrac{ds}{p(s)}\int_0^s f(y_u)du+\\ &\sum_{0<t_k<t}[I_k(y(t_k^-))+J_k(y(t_k^-))\times\int_{t_k}^t\tfrac{p(t_k)}{p(s)}ds].\end{aligned}$$

定理 3.2.2 假设下列条件满足:

(H_1) 存在函数 $M\in L^1([0,T],\mathbb{R}_+)$, $W(\cdot):(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是非减函数, 使得 $\|f(y_t)\|\le M(t)W(\|y_t\|)$;

(H_2) $I_k,J_k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是全连续的;

(H_3) $p_0=\min\{p(t):t\in[0,T]\}$;

那么方程 (*3.1*) 在 $[-r,T]$ 中至少有一个解.

证明: 将 (3.2) 转化成不动点问题, 考虑算子 $\Gamma:\Omega\to\Omega$, 定义如下:

$$\Gamma y(t)=\begin{cases}\phi(t), \quad t\in[-r,0]\\ \phi(t)+p(0)\eta\int_0^t\frac{ds}{p(s)}+\int_0^t\frac{ds}{p(s)}\int_0^s f(y_u)du+\\ \sum\limits_{0<t_k<t}[I_k(y(t_k^-))+J_k(y(t_k^-))\times\int_{t_k}^t\frac{p(t_k)}{p(s)}ds] \quad t\in[0,T].\end{cases}$$

考虑 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$, 其中在 $(-\infty,0]$ 上, $\Gamma_i u=0$, $i=1,2$.

$$\Gamma_1 y(t)=\phi(0)+p(0)\eta\int_0^t\frac{ds}{p(s)}+\int_0^t\frac{ds}{p(s)}\int_0^s f(y_u)du,$$

$$\Gamma_2 y(t)=\sum_{0<t_k<t} I_k(y(t_k^-))+J_k(y(t_k^-))\times\int_{t_k}^t\frac{p(t_k)}{p(s)}ds].$$

先分三步证明 Γ_1 是全连续算子,换句话说, Γ_1 是连续的并且映有界集为相对紧集.

第一步, Γ_1 是连续的.

因为函数 $p(t)$, $f(y_t)$ 是连续的, 容易看出 Γ_1 是连续的.

第二步, Γ_1 映有界集为 Ω 中的有界集.

令$B_q=\{y\in\Omega:\|y\|\le q\}$ 是 Ω 中的有界集合, $y\in B_q$,

$$|\Gamma_1 y(t)|\le\|\phi\|+p(0)|\eta|\frac{T}{p_0}+\frac{T}{p_0}\int_0^T M(u)W(\|y_u\|)du,$$

也就是说, 对 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$, 由于 $W(\cdot)$ 是非减函数, 我们得到

$$\|\Gamma_1 y\|\le\|\phi\|+p(0)|\eta|\frac{T}{p_0}+\frac{T}{p_0}\|M\|_{L^1}\sup\{W(\|y\|_\Omega)\}.$$

第三步, Γ_1 映有界集为 Ω 中的等度连续集.

令 $\tau_1,\tau_2\in J$, $0<\tau_1\le\tau_2$, $y\in B_q=\{y\in\Omega:\|y\|\le q\}$ 是 Ω 中的有界子集, 则对 $\forall\, t\in[0,T]$,

$$\begin{aligned}|\Gamma_1 y(\tau_2)-\Gamma_1 y(\tau_1)| &= |p(0)\eta\textstyle\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{ds}{p(s)}+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{ds}{p(s)}\int_0^s f(y_u)du|\\ &\le (p(0)\eta+\|M\|_{L^1}\sup\{W(\|y\|_\Omega)\})\textstyle\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{ds}{p(s)}ds,\end{aligned}$$

当 $\tau_2\to\tau_1$ 时, $|\Gamma_1 y(\tau_2)-\Gamma_1 y(\tau_1)|\to 0$.

从以上三步, 我们运用 Ascoli-Arzela 定理, 得出 $\Gamma_1:\Omega\to\Omega$ 全连续.

第四步, 集合 $\{y\in\Omega: y=\lambda\Gamma(y),\ 0<\lambda<1\}$ 是有界的.

事实上, 令 $y\in\Omega$, 那么对于 $0<\lambda<1$, $y=\lambda\Gamma(y)$, $\forall\, t\in[0,T]$,

$$|y(t)|\le\|\phi\|+p(0)|\eta|\frac{T}{p_0}+\frac{T}{p_0}\int_0^T M(u)W(\|y_u\|)du,$$

这就是说,

$$\|y\|_\Omega\le\|\phi\|+p(0)|\eta|\frac{T}{p_0}+\frac{T}{p_0}\|M\|_{L^1}\sup\{W(\|y\|_\Omega)\}.$$

因此, $\{y\in\Omega: y=\lambda\Gamma(y),\ 0<\lambda<1\}$ 是有界的. 再由条件 (H_2), 我们得到 Γ_2 全连续, 从而根据定理 1.2.2, 方程 (3.1) 存在一个解.

定理 3.2.3 除了满足前言中的条件以及 (H_3) 外, 假设再满足条件

(H_4) 存在常数 c_k, 使得 $\|I_k(x)\| \leq c_k\|x\|$, $k=1,\cdots,m$, 对 $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

(H_5) 存在常数 d_k, 使得 $\|J_k(x)\| \leq d_k\|x\|$, $k=1,\cdots,m$, 对 $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$;

(H_6) 函数 $f:\Omega \to L^1([0,T])$ 满足 *Lipschitz* 条件, 也就是 $\exists\ L_f > 0$, 使得 $\|f(y_t)-f(z_t)\| \leq L_f\|y_t - z_t\|$, $t \in [0,T]$;

那么脉冲方程 (*3.1*) 存在一个解.

证明: 仿照定理 3.2.2 的证法, 我们也是将 (3.1) 转化成不动点问题, 算子 $\Gamma:\Omega \to \Omega$, 如定理 3.2.2 证明过程中的定义,

同样考虑 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, 其中在 $(-\infty, 0]$ 上, $\Gamma_i u = 0$, $i=1,2$. Γ_1, Γ_2 如定理 3.2.2 证明过程中的定义,

先证明 Γ_1 是压缩算子. 任取 $y(t), z(t) \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\|\Gamma_1 y(t) - \Gamma_1 z(t)\| &\leq \int_0^t \tfrac{ds}{p(s)} \int_0^s \|f(y_u) - f(z_u)\| du \\ &\leq \tfrac{T}{p_0} \int_0^T \|f(y_u) - f(z_u)\| du \leq \tfrac{T}{p_0} T L_f \|y_u - z_u\| \\ &\leq \tfrac{T^2}{p_0} L_f \|y - z\|,\end{aligned}$$

Γ_1 是 Ω 中的压缩算子. 下面分三步证明 Γ_2 是全连续算子, 换句话说, Γ_2 是连续的并且映有界集为相对紧集.

第一步, Γ_2 是连续的.

因为 I_k, J_k 都是连续函数, 因此很容易得到 Γ_2 是连续的.

第二步, Γ_2 映有界集为 Ω 中的有界集.

令 $B_q = \{y \in \Omega : \|y\| \leq q\}$ 是 Ω 中的有界集合, $y \in B_q$, 对 $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}|\Gamma_2 y(t)| &\leq \sum_{i=1}^m |I_k(y(t_k^-))| + \sum_{i=1}^m |J_k(y(t_k^-)) \times \int_{t_k}^t \tfrac{p(t_k)}{p(s)} ds| \\ &\leq \sum_{i=1}^m c_k |y(t_k^-)| + \sum_{i=1}^m \tfrac{T-t_k}{p_0} p(t_k) d_k |y(t_k^-)|,\end{aligned}$$

也就是说, 对 $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, 我们得到

$$\|\Gamma_2 y\| \leq \sum_{i=1}^m (c_k + \frac{T-t_k}{p_0} p(t_k) d_k) \|y\|_\Omega.$$

第三步, Γ_2 映有界集为 Ω 中的等度连续集.

令 $\tau_1, \tau_2 \in J$, $0 < \tau_1 \leq \tau_2$, $y \in B_q = \{y \in \Omega : \|y\| \leq q\}$ 是 Ω 中的有界子集,

则对 $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
|\Gamma_2 y(\tau_2) - \Gamma_2 y(\tau_1)| &= \sum_{0<t_k<\tau_2} [I_k(y(t_k^-)) + J_k(y(t_k^-)) \times \int_{t_k}^{\tau_2} \frac{p(t_k)}{p(s)} ds] - \\
&\quad \sum_{0<t_k<\tau_1} [I_k(y(t_k^-)) + J_k(y(t_k^-)) \times \int_{t_k}^{\tau_1} \frac{p(t_k)}{p(s)} ds]| \\
&\le |\sum_{\tau_1<t_k<\tau_2} I_k(y(t_k^-)) + J_k(y(t_k^-)) \times \int_{t_k}^{\tau_1} \frac{p(t_k)}{p(s)} ds]| + \\
&\quad \sum_{0<t_k<\tau_2} |J_k(y(t_k^-)) \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{p(t_k)}{p(s)} ds| \\
&\le \sum_{0<t_k<\tau_2-\tau_1} [c_k + \frac{T-t_k}{p_0} p(t_k) d_k] q + \sum_{0<t_k<\tau_2} d_k q \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{p(t_k)}{p(s)} ds.
\end{aligned}$$

当 $\tau_2 \to \tau_1$ 时, $|\Gamma_2 y(\tau_2) - \Gamma_2 y(\tau_1)| \to 0$.
从以上三步, 我们运用 Ascoli-Arzela 定理, 得出 $\Gamma : \Omega \to \Omega$ 全连续.
从而根据定理 1.2.3, 系统 (3.1) 存在一个解.

3.3 应用

考察下面 $\mathbb{R}^2$ 空间脉冲泛函微分方程的边值问题:

$$\begin{cases} 2ty'(t) + (t^2+1)y''(t) = \frac{1}{2}y_t, t \in [0,T], \\ \Delta y|_{t=\frac{1}{2}} = 2y(\frac{1}{2}), \\ \Delta y'|_{t=\frac{1}{2}} = 2y'(\frac{1}{2}), \\ y(t) = \phi(t) = (\sin t, \cos t),\ t \in [-r,0],\ y'(0) = (1,0) = \eta. \end{cases} \tag{3.7}$$

结论: (3.7) 在 $[-r,T]$ 中至少存在一个解 $r \in (0,+\infty)$.

证明: $f(y_t) = \frac{1}{2}y_t$, $y_t = (y_1, y_2)$, $p(t) = t^2+1$, $W(\cdot) = \|y_1+y_2+1\|^{\frac{1}{2}}$, $M(t) = \frac{1}{2}\|y_1+y_2\|^{\frac{1}{2}}$. 那么 $\|f(y_t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{{y_1}^2+{y_2}^2} \le \frac{1}{2}\|y_1+y_2\|^{\frac{1}{2}}\|y_1+y_2+1\|^{\frac{1}{2}}$, 从而条件 (H_1) 满足, 条件 (H_2) 显然成立, $p_0 = 1$, 条件 (H_3) 满足, 故由定理 3.2.2 知 (3.7) 在 $[-r,T]$ 中至少存在一个解.

第 4 章　分数阶脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性问题

4.1　前言

本章我们用压缩映像原理来研究分数阶脉冲微分方程. 在最近的研究中, 很少涉及分数阶脉冲微分方程. 最近, Benchohra 等人发现了一类分数阶脉冲方程的初值问题涉及对于 $0<\alpha<1$ 和 $1<\alpha<2$ 的 Caputo 分数导数的解的存在性问题的充分条件, Ahmad 等人给出了分数阶 $1<\alpha<2$ 时的非线性混合型脉冲微分方程边值问题的存在性结果, Mophou 研究了分数阶 $0<\alpha<1$ 时的脉冲微分方程 mild 解的存在性和唯一性. 基于以上的研究工作, 在本章, 我们研究下面这类分数阶脉冲微分方程 (4.1) 解的存在性和唯一性问题. 4.1 和 4.2 节介绍分数阶脉冲微分方程要满足的条件, 4.3 节给出解的存在定理, 4.4 节给出一个实例作为应用.

$$\begin{cases} D_t^\alpha(x(t)+f(t,x_t)) = Ax(t)+g(t,x_t), \quad t\in I=[0,T], t\neq t_k, \\ x(0)=\varphi\in\mathscr{B}, \\ \triangle x|_{t=t_k} = I_k(x_{t_k^-}), k=1,\cdots,m. \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $A(t):\mathscr{D}\subset X\to X$ 是线性算子解析半群的无穷小生成元, $(T(t))_{t\geq 0}$, 在 *Banach* 空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中, 函数关系 $x_t:(-\infty,0)\to X, x_t=x(t+\theta)$, 在抽象空间 $\mathscr{B}$ 上定义, I 为 $[0,T):0<t_1<\cdots<t_k<\cdots<t_m<T$ 是固定的数, $f,g:I\times\mathscr{B}\to X; I_i:\mathscr{B}\to X$ 是适当的函数, $\Delta\xi(t)$ 表示 $\Delta\xi(t)=\xi(t^+)-\xi(t^-)$, $\mathscr{B}:(-\infty,0]\to X$ 是线性函数空间.

4.2　预备知识

在本章中, $A:\mathscr{D}(A)\subset X\to X$ 是线性算子解析半群的无穷小生成元, $(T(t))_{t\geq 0}$ 在X 中, $0\in\rho(A)$, 并且 M 是常数使得 $\|T(t)\|\leq\widetilde{M}$ 对 $\forall\ t\in I$. $(-A)^\alpha, \alpha\in(0,1)$ 代表 A 的分数幂, X_α 是 $(-A)^\alpha$ 的域.

我们说函数 $u(\cdot)$ 在 $[\mu,\tau]$ 上是正规化分段连续函数, 如果 u 是分段连续并且在 $(\mu,\tau]$ 是左连续的. $\mathcal{PC}([\mu,\tau];X)$ 空间由正规化分段连续函数 $[\mu,\tau]\to X$ 构成. $\mathcal{PC}$ 代表由所有 $u\in\mathcal{PC}([0,\mu];X)$ 构成的空间, $u(\cdot)$ 在 $t\neq t_i$ 连续, $u(t_i^-)=u(t_i)$, $u(t_i^+)$ 存在, 对所有的 $i=1,\cdots,m$. 在本章中, $(\mathcal{PC},\|\cdot\|_{\mathcal{PC}})$ 是空间 $\mathcal{PC}$ 被赋予范数 $\|x\|_{\mathcal{PC}}=\sup\limits_{s\in I}\|x(s)\|$. 显然, $(\mathcal{PC},\|\cdot\|_{\mathcal{PC}})$ 是一个 *Banach* 空间.

4.3 主要结论

在本节中, 我们首先研究问题 (4.1) 的 mild 解, 然后通过不动点理论得到系统 (4.1) 存在至少一个 mild 解的充分条件. 事实上, 我们可以给出下面方程 mild 解的定义

$$
\begin{cases} D_t^{\alpha}(x(t)+f(t,x_t)) = Ax(t)+g(t,x_t), \ \ t\in I=[0,T], t\neq t_k, \\ x(0)=\varphi\in\mathscr{B}. \end{cases} \tag{4.2}
$$

定义 4.3.1 函数 $u:(-\infty,T]\to X$ 是抽象 *Cauchy* 问题 *(4.2)* 的 *mild* 解, 如果 $u_0=\varphi$; $u(\cdot)_{|I}\in\mathcal{PC}$ 并且

$$
u(t)=T(t)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t,u_t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+
$$

$$
\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds, \quad t\in I.
$$

定义 4.3.2 函数 $u:(-\infty,T]\to X$ 称为问题 (*4.1*) 的 *mild* 解, 如果 $u_0=\varphi$; $u(\cdot)_{|I}\in\mathcal{PC}$ 并且满足下面方程

$$
\begin{aligned}
u(t) \ = \ & T(t)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t,u_t)- \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds- \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+ \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\
& \sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)[I_i(u_{t_i})+\Delta f(t_i,u_{t_i})], \quad t\in I.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

下面我们阐述并证明上述结论.

引理 4.3.1 如果 $u_0=\varphi$; $u(\cdot)_{|I}\in\mathcal{PC}$ 是 (*4.2*) 的 *mild* 解, 那么对任意的 $t\in(t_{k-1},t_k]$, $k=1,\cdots,m$, 满足 $u_0=\varphi$, $u(\cdot)_{|I}\in\mathcal{PC}$ 并且

$$
\begin{aligned}
u(t) \ = \ & T(t)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t,u_t)- \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds- \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+ \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\
& \sum_{0<t_i<t}T(t-t_i)[I_i(u_{t_i})+\Delta f(t_i.u_{t_i})], \quad t\in I.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

是 (4.1) 的 *mild* 解. 换句话说, $u(t)$ 是 (*4.1*) 的 *mild* 解.

证明: 由定义 4.3.1 知,

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t,u_t)-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds, \quad t\in[0,t_1], \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} u(t_1)=u(t_1^-) &= T(t_1)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t_1^-,u_{t_1^-})- \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}AT(t_1-s)f(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}T(t_1-s)g(s,u_s)ds. \end{aligned}$$

由 $u(t_1^+)=u(t_1^-)+I_1(u(t_1^-))$, 我们可以看出

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t-t_1)(u(t_1^+)+f(t_1^+,u_{t_1^+}))-f(t,u_t)- \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds \\ &= T(t)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t,u_t)- \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds- \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^t(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds+ \\ &\quad T(t-t_1)[I_1(u_{t_1})+\Delta f(t_1,u_{t_1})], \quad t\in(t_1,t_2], \end{aligned}$$

令 $t=t_2$ 并且 $t=t_2^+$,

$$\begin{aligned} u(t_2) &= T(t_2)(\varphi(0)+f(0,\varphi))-f(t_2^-,u_{t_2^-}) \\ &\quad -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}AT(t_2-s)f(s,u_s)ds- \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{(\alpha-1)}AT(t_2-s)f(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}T(t_2-s)g(s,u_s)ds+ \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{(\alpha-1)}T(t_2-s)g(s,u_s)ds+ \\ &\quad T(t_2-t_1)[I_1(u_{t_1})+\Delta f(t_1,u_{t_1})], \end{aligned}$$

从 $u(t_2^+) = u(t_2^-) + I_2(u(t_2^-))$, 对 $t \in (t_2, t_3]$, 我们得到

$$
\begin{aligned}
u(t) &= T(t-t_2)(u(t_2^+) + f(t_2^+, u_{t_2^+})) - f(t, u_t) - \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds \\
&= T(t)(\varphi(0) + f(0,\varphi)) - f(t,u_t) - \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds - \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_2-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds - \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,u_s)ds + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t_1}(t_1-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}(t_1-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds + \\
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_2}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,u_s)ds + \\
&T(t-t_1)[I_1(u_{t_1}) + \Delta f(t_1,u_{t_1})] + T(t-t_2)[I_2(u_{t_2}) + \Delta f(t_2,u_{t_2})].
\end{aligned}
$$

重复上述过程, 我们可以很容易的推导出 (4.4) 对任意的 $t \in (t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \cdots, m$ 成立.

注: 4.3.4 如果不存在不连续点, 也就是说, 如果 $I_k(x_{t_k}) = 0$, $k = 1, \cdots, m$, 那么定义 4.3.1 等价于定义 4.3.2.

在本章定义 4.3.2 下理解 mild 解. 现在我们做以下假设:

(H_1) 函数 $f, g : I \times \mathscr{B} \to X$ 和 $I_i : \mathscr{B} \to X, i = 1, \cdots, m$, 是连续的, 并且满足下面的条件:

(i) 对每一个 $x : (-\infty, T] \to X$ 有 $x_0 = \varphi$ 且 $x|_I \in \mathcal{PC}$, 函数 $t \to g(t, x_t)$ 是强可测的, 函数 $t \to f(t, x_t)$ 属于 $\mathcal{PC}$;

(ii) 存在正常数 $\beta \in (0,1)$, 和函数 $\mu_1 \in L^\infty(I, R^+)$ 还有 L_f, L_i, $i = 1, \cdots, m$, 使得 f 是 X_β–值的, $(-A)^\beta f : I \times \mathscr{B} \to X$ 连续且有以下条件

$$
\begin{aligned}
&\|g(t,\psi_1) - g(t,\psi_2)\| \le \mu_1(t)\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{B}}, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{B}, t \in I \\
&\|(-A)^\beta f(t,\psi_1) - (-A)^\beta f(t,\psi_2)\| \le L_f\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{B}}, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{B}, t \in I \\
&\|I_i(\psi_1) - I_i(\psi_2)\| \le L_i\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathscr{B}}, \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathscr{B}
\end{aligned}
$$

(H_2) 函数 $\Theta(t): I \to R^+$ 定义为

$$\begin{aligned}\Theta(t) &= K_\sigma[L_f(\|(-A)^{(-\beta)}\|(1+2m\widehat{M}) + \frac{(m+1)C_{1-\beta}t^{(\alpha+\beta-1)}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)}) + \\ &\quad \widehat{M}(\frac{(m+1)t^\alpha\|\mu_1\|_{L^\infty(I,R^+)}}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{m} L_i)],\end{aligned}$$

其中 $K_\sigma = \sup_{s\in I} K(s)$, 满足 $0 < \Theta(t) \le \gamma < 1$, 对所有的 $t \in I$.

注: 4.3.5 令 $x : (-\infty, T] \to X$ 使得 $x_0 = \varphi$ 并且 $x|_I \in \mathcal{PC}$ 再假设条件 (H_1) 满足. 由 $s \to AT(t-s)$ 在 $[0,t)$ 上的一致连续性且有估计

$$\begin{aligned}\|AT(t-s)f(s,x_s)\| &= \|(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^\beta f(s,x_s)\| \\ &\le \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}\|(-A)^\beta f(s,x_s)\|,\end{aligned}$$

$\theta \to AT(t-\theta)f(\theta, x_\theta)$ 在 $[0,t)$对每个 $t > 0$ 是可积的. 同样的, 我们可以断言函数 $\theta \to AT(t-\theta)g(\theta, x_\theta)$ 在 $[0,t)$ 上对每个 $t > 0$ 是可积的.

定理 4.3.1 在条件 $(H_1), (H_2)$ 下, 系统 *(4.1)* 有唯一的 *mild* 解.

证明: 在度量空间 $\mathscr{B}\mathcal{PC} = \{u : (-\infty, T] \to X, u_0 = \varphi, u|_I \in \mathcal{PC}\}$ 赋予距离 $d(u,v) = \|u - v\|_{\mathcal{PC}}$, 我们定义算子 $\Gamma : \mathscr{B}\mathcal{PC} \to \mathscr{B}\mathcal{PC}$ 如下:

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} \varphi(t), \quad t \le 0 \\ T(t)(\varphi(0) + f(0,\varphi)) - f(t,x_t) - \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\limits_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k - s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,x_s)ds - \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}AT(t-s)f(s,x_s)ds + \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum\limits_{0<t_i<t}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_k - s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,x_s)ds + \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{(\alpha-1)}T(t-s)g(s,x_s)ds + \\ \sum\limits_{0<t_i<t} T(t-t_i)[I_i(x_{t_i}) + \Delta f(t_i; x_{t_i})], \quad t \in I. \end{cases}$$

由注 4.3.5, 我们知道 $s \to T(t-s)g(s.x_s)$ 和 $s \to T(t-s)Af(s,x_s)$ 是可积的, 在 $[0,t)$ 对每个 $t \in I$. 因此, Γ 在 $\mathcal{PC}$ 中有定义. 取 $u, v \in \mathscr{B}\mathcal{PC}$, 由于

$\| \triangle f(t_i, u_{t_i}) - \Delta f(t_i, v_{t_i})\| \leq 2L_f K_\sigma \|(-A)^{(-\beta)}\| \, \|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}}$, 我们得到

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq\ & \|f(t,u_t) - f(t,v_t)\| + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{(\alpha-1)} \|AT(t-s)(f(s,u_s) - f(s,v_s)\| ds + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{(\alpha-1)} \|AT(t-s)(f(s,u_s) - f(s,v_s))\| ds + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{(\alpha-1)} \|T(t-s)(g(s,u_s) - g(s,v_s))\| ds + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{(\alpha-1)} \|T(t-s)(g(s,u_s) - g(s,v_s))\| ds + \\
& \sum_{0<t_i<t} \|T(t-t_i)(I_i(u_{t_i}) - I_i(v_{t_i}))\| + \| \triangle f(t_i, u_{t_i}) - \Delta f(t_i, v_{t_i})\| \\
\leq\ & \|(-A)^{(-\beta)}\| L_f \|u_t - v_t\|_{\mathscr{B}} + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{(\alpha+\beta-2)} C_{1-\beta} L_f \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} ds + \\
& \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha+\beta-2} C_{1-\beta} L_f \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} ds + \\
& \frac{\widehat{M}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{\alpha-1} \mu_1(s) \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} ds + \\
& \frac{\widehat{M}}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t_k} (t-s)^{\alpha-1} \mu_1(s) \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} ds + \\
& \widehat{M} \sum_{0<t_i<t} (L_i \|u_{t_i} - v_{t_i}\|_{\mathscr{B}} + 2L_f K_\sigma \|(-A)^{(-\beta)}\| \, \|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}}) \\
\leq\ & \|(-A)^{(-\beta)}\| L_f \|u_t - v_t\|_{\mathscr{B}} + \frac{(m+1) C_{1-\beta} L_f t^{(\alpha+\beta-1)}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)} \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} + \\
& \frac{(m+1)\widehat{M} t^{\alpha} \|\mu_1\|_{L^\infty(I,R^+)}}{\Gamma(\alpha+1)} \|u_s - v_s\|_{\mathscr{B}} + \widehat{M} \sum_{i=1}^{m} (L_i \|u_{t_i} - v_{t_i}\|_{\mathscr{B}} + \\
& 2L_f K_\sigma \|(-A)^{(-\beta)}\| \, \|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}}), \quad \forall\, t \in [0,T],
\end{aligned}$$

我们不难推出

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq\ & K_\sigma [L_f (\|(-A)^{(-\beta)}\| (1 + 2m\widehat{M}) + \frac{(m+1) C_{1-\beta} t^{(\alpha+\beta-1)}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)}) + \\
& \widehat{M} (\frac{(m+1) t^{\alpha} \|\mu_1\|_{L^\infty(I,R^+)}}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{m} L_i)] \, \|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

这样, 很容易推断出,

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq\ & K_\sigma [L_f (\|(-A)^{(-\beta)}\| (1 + 2m\widehat{M}) + \frac{(m+1) C_{1-\beta} t^{(\alpha+\beta-1)}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)}) + \\
& \widehat{M} (\frac{(m+1) t^{\alpha} \|\mu_1\|_{L^\infty(I,R^+)}}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{i=1}^{m} L_i)] \, \|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}},
\end{aligned}$$

$$\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq \Theta(t)\|(u-v)|_I\|_{\mathcal{PC}},$$

因此, 我们得出 Γ 在 $\mathscr{B}\mathcal{PC}$ 中有唯一的不动点, 系统 (4.1) 有唯一的 mild 解.

4.4 应用

令 $X = L^2([0,\pi])$ 为可积函数空间, 并且 $\mathscr{B} = \mathcal{PC}_r \times L^2(g, X)$.现在, 我们考虑算子 $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$, $Ax = x''$, 其中,

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in X : x'' \in X, x(0) = x(\pi) = 0\},$$

A 是一个解析且紧的无限小生成元, A 是一个离散谱, 其本征值是$-n^2, n \in N$, 其相应的本征函数是 $z_n(\xi) = (\frac{2}{\pi})\sin(n\xi)$, 下面假设成立:

(a) $\{z_n, n \in N\}$ 是 X 上的标准正交基;

(b) 如果$x \in \mathcal{D}$, 则 $Ax = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 < x, z_n > z_n$;

(c) 对于 $x \in X, T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} < x, z_n > z_n$. 特别的, 我们有对 $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ $\forall\, t \geq 0$, $(T(t)_{t\geq 0})$ 是一致稳定的半群, 此外, 我们可以在 A 上定义分数幂;

(d) 对每一个 $x \in X$ 和 $\beta \in (0,1)$, 有 $(-A)^{\beta}x = \Sigma_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{2\beta}} < x, z_i > z_i$. 特别地, $\|(-A)^{1/2}\| = 1$;

(e) 对每一个 $x \in X$ 和 $\beta \in (0,1)$, $(-A)^{\beta}x = \Sigma_{i=1}^{n} i^{2\beta} < x, z_i > z_i$.

此外,

$$D((-A)^{\beta}) = \{x : x \in X, \sum_{i=1}^{n} i^{2\beta} < x, z_i > z_i \in X\}.$$

考虑下面分数阶脉冲微分方程:

$$\begin{cases} D_t^q[\omega(t,\xi) + \displaystyle\int_{-\infty}^{t}\int_0^{\pi} b(s-t,\eta,\xi)\omega(\xi,s)d\eta ds \\ = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\omega(t,\xi) + a_0(t,\xi)\omega(t,\xi) + \mathscr{N}(t,\omega(t,\xi)), \\ \omega(t,0) = \omega(t,\pi) = 0, \quad t \in I = [0,T], \\ \omega(\tau,\xi) = \varphi(\tau,\xi), \quad \tau \leq 0,\ \xi \in [0,\pi], \\ \Delta\omega(t_i^+,\cdot) - \omega(t_i^-,\cdot) = \displaystyle\int_0^{\pi} p_i(\xi,\omega(t_i,s))ds, \quad i = 1,\cdots,m. \end{cases} \tag{4.5}$$

其中 (t_i) 是一个严格增的正实数序列, 对于这个系统, 我们假设以下条件:
$(a)^*$ 函数 $\mathscr{N} : R \times R \to R$ 是连续的, 且有连续可积函数 $\mu_1 : R \to [0,\infty)$ 使得

$$|\mathscr{N}(t,x)| \leq \mu_1(t)|x|, \quad t \in [0,T],\ x \in R$$

成立.

$(b)^*$ 函数 $b(s,\eta,\xi)$, $\frac{\partial}{\partial\xi}b(s,\eta,\xi)$ 可积, $b(s,\eta,\pi)=b(s,\eta,0)$ 且

$$L_f := \sup\{\int_0^\pi\int_{-\infty}^0\int_0^\pi(\frac{1}{g(s)}\frac{\partial^i b(s,\eta,\xi)}{\partial\xi^i}d\eta ds d\xi)^2 : i=0,1\} < +\infty,$$

$(c)^*$ 函数 $p_i:[0,\pi]\times R\to R,(i=1,\cdots,m)$ 连续且存在正常数 L_i 使得

$$|p_i(\xi,s)-p_i(\xi,\overline{s}) \le L_i|s-\overline{s}|,\quad \xi\in[0,\pi], s,\overline{s}\in R.$$

我们下面定义函数 $f,g:[0,\alpha]\times\mathscr{B}\to X, I_i:X\to X$ 且 $A(t):D(A(t))\subset X\to X$

$$\begin{aligned}
f(t,\phi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0\int_0^\pi b(s,\eta,\xi)\phi(s,\eta)d\eta ds,\quad t\in[0,T],\ \xi\in[0,\pi],\\
g(t,\phi)(\xi) &= \mathscr{N}(t,\phi(0,s)),\quad t\in[0,T],\ \xi\in[0,\pi],\\
I_i(\phi)(\xi) &= \int_0^\pi p_i(\xi,\phi(0,s))ds,\quad i\in N,\ \xi\in[0,\pi],\\
A(t)x(\xi) &= Ax(\xi)+a_0(t,\xi)x(\xi),\quad x\in D(A(t)),\quad t\in[0,T],\ \xi\in[0,\pi],
\end{aligned}$$

则 $D(A(t))=D(A)$, $t\in[0,T]$ 且

$$Y := D(A^{1/2}) = \{x(\cdot)\in X : \sum_{n=1}^{\infty} n < x, z_n > z_n \in X\}.$$

我们可以看出

$$\begin{cases} u'(t)=A(t)u(t), & t\ge s,\\ u(s)=x\in X, \end{cases}$$

存在解析半群 $(T(t))_{t\ge 0}$, 满足

$$\|(-A)^{\frac{1}{2}}T(t)\|_X \le \frac{e^{\frac{-t}{2}}t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}},\quad 且\ \|(-A)^{-\frac{1}{2}}\|=1,\quad 对\ t\in[0,T],$$

容易看出, 问题 (4.5) 可以看作是抽象脉冲 *Cauchy* 问题 (4.1) 的模型.

定理 4.4.1 假设前面的条件都成立. 此外, 假定

$$\sum_{i=1}^{\infty}[\int_0^\pi |p_i(\xi,0)|^2 d\xi\ ]^{1/2} < \infty.$$

如果

$$K_\sigma[L_f(1+2m\widehat{M})+\tfrac{(m+1)C_{1-\beta}T^{(\alpha+\beta-1)}}{(\alpha+\beta-1)\Gamma(\alpha)})+\widehat{M}(\tfrac{(m+1)T^\alpha\|\mu_1\|_{L^\infty(I,R+)}}{\Gamma(\alpha+1)}+\pi\sqrt{\pi}\textstyle\sum_{i=1}^m L_i)] < 1, \tag{4.6}$$

那么, 脉冲系统 *(4.5)* 存在一个 *mild* 解.

证明: 我们由 $(b)^*$ 看出, F 是 $X_{\frac{1}{2}}$–值, 并且 $F: I\times\mathscr{B}\to X_{\frac{1}{2}}$ 是连续的. 此外, $(-A)^{\frac{1}{2}}F(t,\cdot)$ 是一个有界算子, 对 $t\in I$, 有 $\|(-A)^{\frac{1}{2}}F(t,\cdot)\|\le L_f$ 成立.

由 $(a)^*$ 知, 函数 $G(t,\cdot):\mathscr{B}\to X$ 在 $t\in[0,T]$ 中是连续的, 且 $G(\cdot,\phi):[0,\infty)\to X$ 是强可测的, 对每一个 $\phi\in\mathscr{B}$. 另外, 对 $t\in[0,T]$ 和 $\phi\in\mathscr{B}$, 有

$$\|G(t,\phi)\|_X^2=\int_0^\pi|\mathscr{N}(t,\phi(0,\xi))|^2d\xi\le\int_0^\pi\mu_1^2(t)|\phi(0,\xi)|^2d\xi\le\mu_1^2(t)\|\phi\|_{\mathscr{B}}^2.$$

从条件 $(c)^*$, 我们有

$$\begin{aligned}|I_i(\phi)(\xi)-I_(\psi)(\xi)| &\le \int_0^\pi|p_i(\xi,\phi(0,s)-p_i\xi,\psi(0,s))|ds\\ &\le L_i\int_0^\pi|\phi(0,s)-\psi(0,s)|ds\le\pi L_i\|\phi-\psi\|_{\mathscr{B}},\end{aligned}$$

对所有的 φ, $\psi\in\mathscr{B}$. 又由 $\|I_i(\phi)-I_i(\psi)\|_X\le\pi\sqrt{\pi}L_i\|\varphi-\psi\|_{\mathscr{B}}$, 根据定理 4.3.1 知道系统 (4.5) 存在唯一 mild 解.

结 论

本文研究了脉冲微分方程解的存在性问题. 本文在以下几个方面取得了进展.

第二章, 我们研究了一类非线性二阶脉冲常微分方程边值问题解存在的条件, 主要结果为:

(1) 解是存在的, 我们通过下面这个定理得到解的形式.

定理2.2.1 如果 $x \in PC^1[J, R_+] \cap C^2[J', R_+]$ 满足方程

$$-(p''(t)x(t) + 2p'(t)x'(t) + p(t)x''(t)) = f(t, x(t)), \tag{2.3}$$

那么,

$$\begin{aligned} x'(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}p(0)x'(0) - \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}p(0)x'(0)t + \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}\int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds- \\ & \tfrac{1}{p(t)}\int_0^t f(s,x(s))ds + \sum_{0<t_k<t}(\tfrac{1}{p(t)}p'(t_k) - \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}p(t_k))I_k(x(t_k))- \\ & \tfrac{p'(t)}{p^2(t)}\sum_{0<t_k<t}p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k), \;\; \forall\, x \in J, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}\{p(0)x'(0)t - \int_0^t(t-s)f(s,x(s))ds+ \\ & \sum_{0<t_k<t}p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum_{0<t_k<t}p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)\}, \;\; \forall\, x \in J. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(2) 然后证明方程可以转换成与之形式等价的积分方程来解.

定理2.2.2 $x \in PC^1[J, R_+] \cap C^2[J', R_+]$ 是 BVP(2.2) 的解当且仅当 $x \in PC^1[J, R_+]$ 是下面脉冲积分方程的解

$$\begin{aligned} x(t) \;=\; & \tfrac{1}{p(t)}\{\int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds+ \\ & \sum_{0<t_k<t}p(t_k)I_k(x(t_k)) + \sum_{0<t_k<t}p'(t_k)I_k(x(t_k))(t-t_k)+ \\ & \tfrac{t}{\delta}\sum_{k=1}^{m}[p'(1)p(t_k) + p'(1)p'(t_k)(1-t_k) - p(1)p'(t_k)]I_k(x(t_k))\}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{t}{\delta}[p(1) - p'(1)(1-s)], & t \le s, \\ \frac{s}{\delta}[p(1) - p'(1)(1-t)], & t > s. \end{cases}$$

然后通过下面这个定理结合不动点指数理论给出方程两个解的存在区间.

定理2.2.4 设当 $x \to +\infty$ 时和 $x \to 0_+$ 时, 均有 $\frac{f(t,x)}{p(t)x} \to 0$ 关于 $t \in J$ 一致, 且

$$\frac{p(t)I_k(x)}{x} \to 0, \;\; \frac{p'(t)I_k(x)}{x} \to 0, \;\; k = 1, 2, \cdots, m, \tag{2.22}$$

又设存在 $u_0 > 0$, 及 $0 < a_0 < b_0 \le 1$, 使

$$f(t,x) \ge \frac{8\delta^2}{p'^2(1)}h(t)u_0, \;\; \forall\, t \in J_0 = [a_0, b_0], \;\; x \ge u_0, \tag{2.23}$$

其中 $h \in C[J_0, R_+]$, 满足

$$\frac{1}{p(t)}\int_{J_0} h(t)dt > \frac{1}{a_0}, \tag{2.24}$$

那么, BVP(2.2) 在 $PC[J, R_+] \cap C^2[J', R_+]$ 中具有两个解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 满足 $x_1(t) \neq 0, x_2(t) > 0,\ 0 < t \leq 1$, 并且

$$\inf_{t \in J_0} x_1(t) < u_0 < \inf_{t \in J_0} x_2(t). \tag{2.25}$$

第三章, 我们将脉冲微分方程推广到泛函形式, 利用不动点定理, 用两种方法证明了解的存在性. 主要结果为:

(1) 为了应用定理 1.2.2 的条件, 我们给出以下结果

定理3.2.2 假设下列条件满足:

(H_1) 存在函数 $M \in L^1([0,T], \mathbb{R}_+)$, $W(\cdot) : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 是非减函数, 使得 $\|f(y_t)\| \leq M(t)W(\|y_t\|)$;

(H_2) $I_k, J_k :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是全连续的;

(H_3) $p_0 = \min\{p(t) :\ t \in [0,T]\}$;

那么方程 (3.1) 在 $[-r, T]$ 中至少有一个解.

(2) 应用定理 1.2.3 的结果, 我们得出下面定理,

定理3.2.3 除了满足前言中的条件以及 (H_3) 外, 假设再满足条件

(H_4) 存在常数 c_k, 使得 $\|I_k(x)\| \leq c_k\|x\|$, $k = 1, \cdots, m$, 对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

(H_5) 存在常数 d_k, 使得 $\|J_k(x)\| \leq d_k\|x\|$, $k = 1, \cdots, m$, 对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$;

(H_6) 函数 $f : \Omega \to L^1([0,T]$ 满足 *Lipschitz* 条件, 也就是 $\exists\, L_f > 0$, 使得 $\|f(y_t) - f(z_t)\| \leq L_f\|y_t - z_t\|, t \in [0,T]$;

那么方程 (3.1) 在 $[-r, T]$ 中至少有一个解.

第四章, 我们研究了一类分数阶脉冲微分方程, 利用压缩映像原理, 得到了解的存在性. 主要结果为:

(1) 得到解是存在的, 解的形式为

$$\begin{aligned}
u(t) \ = \ & T(t)(\varphi(0) + f(0,\varphi)) - f(t,u_t) - \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{(\alpha-1)} AT(t-s) f(s,u_s) ds - \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{(\alpha-1)} AT(t-s) f(s,u_s) ds + \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{0<t_i<t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - s)^{(\alpha-1)} T(t-s) g(s,u_s) ds + \\
& \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_k}^{t} (t-s)^{(\alpha-1)} T(t-s) g(s,u_s) ds + \\
& \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)[I_i(u_{t_i}) + \Delta f(t_i, u_{t_i})], \quad t \in I.
\end{aligned}$$

(2) 参见第四章中条件 (H_1) 和 (H_2), 有下面结果.

定理4.3.1 在条件 (H_1) 和 (H_2) 下, 系统 (4.1) 有唯一的 mild 解.

脉冲微分系统的研究领域具有吸引力和挑战性. 在理论上, 它综合了连续和离散系统的特征, 但又超出了连续和离散系统的范围, 还存在很多尚待解决的研究课题. 本文所做的工作只是脉冲微分系统研究中的一小步, 在研究过程中还有很多方面值得深入探究. 我们可以考虑以下方面:

(i) 对于含有函数 $p(t)$ 的脉冲微分方程, 可以考虑 n 阶的情况, $p(t)$ 的形式可以更复杂, 还可以考虑终值问题.

(ii) 对于分数阶脉冲微分方程, 可以考虑含有函数 $p(t)$ 的情况, 还可以考虑用黎曼积分来做.

参考文献

[1] 林伟. 复杂系统中的若干理论问题及其应用. 复旦大学博士学位论文, 2002

[2] 顾凡及, 李训经, 阮炯. 动态神经元的网络模型. 生物物理学报, 1992,8:339-345

[3] Liu X, Willms A. Impulsive controllability of linear dynamical systems with applications to maneuvers of spacecraft. MPE, 1996,8:12-32

[4] Mil'man U, Myshkis A. On the stability of motion in the presence of impulses. Siberian Math J, 1960,1:233-237

[5] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations. Singapore: World scientific, 1995

[6] Bainov D, Simeonov P. Systems with impulsive effect: Stability, Theory and Applications, New York: Halsted Press, 1998

[7] Zhang X, Liu L. Initial value problems for nonlinear second order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2006,64:2562-2574

[8] Zhang X, Liu L, Wu Y. Global solutions of nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2007,67:2335-2349

[9] 谢胜利. *Banach* 空间二阶非线性脉冲积分-微分方程初值问题. 数学物理学报, 2007,27A(1):138-145

[10] 张晓燕, 孙经先. *Banach* 空间二阶非线性混合型脉冲积分-微分方程的解系统科学与数学, 2002,22(4):428-438

[11] Zhang X, Liu L. Positive solutions of fourth-order four-point boundary value problems with p-Laplacian operator. J Math Anal Appl, 2007,336:1414-1423

[12] Zhang X, Liu L, Wu Y. Positive solutions of nonresonance semipositone singular Dirichlet boundary value problems. Nonlinear Anal, 2008,68:97-108

[13] Zhang X, Zou H, Liu L. Positive solutions of second-order m-point boundary value problems with changing sign singular nonlinearity. Appl Math Lett, 2007,20:629-636

[14] Zhang Q, Jiang D. Upper and lower solutions method and a second order three-point singular boundary value problem. Comput Math Appl, 2008,56:1059-1070

[15] Xu F, Liu L, Wu Y. Multiple positive solutions of four-point nonlinear boundary value problems for a higher-order p-Laplacian operator with all derivatives. Nonlinear Anal, 2009,71:4309-4319

[16] Lakshmikantham V, Papageorgiou N, Devi J. The method of upper and lower solutions and monotone technique for impulsive differential equations with variable moments. Appl Anal, 1993,51:41-54

[17] Lakshmikantham V, Leela S, Kaul S. Comparison principle for impulsive differential equations with variable times and stability theory. Nonliear Anal, 1994,22:499-503

[18] Dong Y. Perodic boundary value problems for functional differential equations with impulses. J Math Anal Appl, 1997,210:170-182

[19] Lee Y, Liu X. Study of singular boundary value problems for second order impulsive differential equations. J Math Anal Appl, 2007,331:159-176

[20] Luo Z, Jing Z. Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations. Comput Math Appl, 2008,55:2094-2107

[21] Zhao Y, Chen H. Multiplicity of solutions to two-point boundary value problems for second-order impulsive differential equations. Appl Math Comput, 2008,206:925-931

[22] 张炳根, 孔令举. 四阶奇异边值问题正解的存在性. 数学年刊, 2001,22:397-402

[23] Dunninger D, Wang H. Existence and multiplicity of positive solutions for elliptic systems. Nonlinear Anal, 1997,29:1051-1060

[24] 张凤琴, 马知恩, 赵爱民等. 带参数的一阶脉冲微分方程边值问题. 工程数学学报, 2003,20(1):22-26

[25] 梁瑞喜. 脉冲微分系统解的存在性问题: [湖南师范大学博士学位论文]. 长沙: 湖南师范大学数学与计算机科学学院, 2009,1-5

[26] Chang Y , Li W. Existence results for second order implusive functional differential inclusions. J Math Anal Appl, 2005,301:477-490

[27] Agarwal R, Benchohra M, Slimani B. Existence results for differential equations with fractional order and impulses. Mem Differential Equations Math Phys, 2008,44:1-21.

[28] Benchohra M, Slimani B. Existence and uniqueness of solutions to impulsive fractional differential equations. Elec J Diff Equa, 2009,10:1-11

[29] Mophou G. Existence and uniqueness of mild solutions to impulsive fractional differential equations. Nonlinear Anal, 2010,72:1604-1615

[30] Mophou G, N'Guérékata G. Existence of mild solution for some fractional differential equations with nonlocal conditions. Semigroup Forum, 2009,79(2):322-335

[31] Guo D. Multiple positive solutions of impulsive nonlinear Fredholm integral equations and applications. J Math Anal Appl, 1993,173:318-324

[32] Wang H, Chen H. Boundary value problem for second-order impulsive functional differential equations. Appl Math Comput. 2007,191:582-591

[33] Liang R, Shen J. Periodic boundary value problem for second-order impulsive functional differential equations. Appl Math Comput, 2007.193:560-571

[34] He Z, Yu J. Periodic boundary value problem for first-order impulsive functional differential equations. J Comput Appl Math, 2002,138:205-217

[35] Guo F, Liu L, Wu Y. Global solutions of initial value problems for nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2005,61:1363-1382

[36] Zhang X, Liu L, Wu Y. Global solutions of nonlinear second-order impulsive integro-differential equations of mixed type in Banach spaces. Nonlinear Anal, 2007,67:2335-2349

[37] Agarwal R, Benchohra M, Hamani S. Boundary value problems for differential inclusions with fractional order Adv Stud Contemp Math, 2008,16(2):181-196

[38] Guo D, Lakshmikantham V, Liu X. Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces . Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996,1211-1214

[39] Guo D. Periodic boundary value problems for second order implusive integro-differential equations in Banach spaces. Nonlinear Anal, 1997,28:983-997

[40] Guo D, Lakshmikantham V. Multiple solutions of two-point boundary value problems for ordinary differential equations in Banach spaces. J Math Anal Appl, 1998,129:211-222

[41] Guo D. Existence of solutions of boundary value problems for nonlinear second order impulsive differential equations in Banach spaces. J Math Anal Appl. 1994,181:407-421

[42] 郭大钧. 非线性泛函分析. 山东科学技术出版社, 2004

[43] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法. 山东科学技术出版社, 1995

[44] Granas A, Dugundji J. Fixed Point Theory. Springer-Verlag, New York, 2003

[45] Martin R. Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Robert E Krieger Publ Co, Florida, 1987

[46] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 科学出版社, 2005

致 谢

时至今日，经过很长一段时间的努力，论文的写作已告一段落，在完成之际，谨向给予我无私帮助的老师和同学致以诚挚的谢意！

首先，我要感谢我的导师舒小保副教授，在刚刚进入研究生阶段的学习时，我是那么的不知所措. 在他的带领和指导下，我很快就熟悉了我们的领域，明确了我的方向. 尤其是在舒老师为我们开的课程，使我受益匪浅. 他渊博的知识为我指明了方向，严谨的治学态度、精益求精的精神给了我深刻的影响，使得我在读研期间乃至以后的工作深深受益. 我的学业得以顺利完成与他的悉心指导是分不开的,此文从选题到定稿无不凝聚着舒老师的大量心血. 另外，舒老师还在生活上给了我很大帮助. 在此向舒老师表示我深深的谢意.

感谢黄立宏教授、郭上江教授、刘岚喆教授、张正球教授、袁朝辉副教授、杨必中老师等各位授课恩师对我学习上的帮助，正是他们的指导，才使我有了一定的科研基础.

感谢湖南大学数学与计量经济学院的领导和各位老师的关心、支持和帮助.

感谢2007级的兄弟姐妹们，朝夕相处、互相帮助、共同进取的经历都使我难以忘却.

最后，我要感谢辛勤养育我的父母、亲人和朋友对我学业的理解和支持，以及在生活和学习方面帮助过我的同学和朋友们.

附录 攻读学位期间所撰写的学术论文目录

[1] 舒小保, 王密. 一类二阶中立性泛函微分方程的无穷多个次调和周期解. 应用数学, 2008, 21(3): 542-547

[2] Wang M, Gong X. Boundary value problems for nonlinear second order impulsive equations with variable parameters (已投)

脉冲微分方程的解及其应用

作者：　　　　　　　　王密
学位授予单位：　　　　湖南大学

本文读者也读过(10条)

1. 高璇 二阶脉冲微分方程边值问题正解存在性[学位论文]2010
2. 王麟 分数阶微分方程边值问题解的存在性[学位论文]2009
3. 于爱文 脉冲微分方程边值问题[学位论文]2009
4. 李秋萍 几类分数阶微分方程初值问题解的研究[学位论文]2011
5. 朱村 非线性奇异微分方程和脉冲方程边值问题的解的存在性[学位论文]2010
6. 刘健 分数阶微分方程的基本理论及应用[学位论文]2009
7. 范晓丽 一类常微分方程组及分数阶微分方程的解的存在性[学位论文]2010
8. 刘改云.钟记超.Liu Gaiyun.Zhong Jichao 具无限时滞的分数阶微分方程解的存在理论[期刊论文]-湘南学院学报2011,32(2)
9. 杨小飞 含凹凸函数的半线性微分方程解的确切个数[学位论文]2009
10. 巩玲 非线性分数阶微分方程Dirichlet-Neumann型边值问题的正解的存在性[学位论文]2010

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Thesis_Y1724918.aspx